

Monika Jakubowska-Mirek

Uniwersytet Warszawski*

E-mail: m.jakubowska@uw.edu.pl

ORCID: 0000-0003-3450-172X

Ewa Stożek

Uniwersytet Warszawski**

E-mail: estozek@gmail.com

ORCID: 0000-0001-6645-9007

Monitorowanie osiągnięć uczniów z matematyki jako metoda doskonalenia zawodowego nauczycieli***

Summary

MONITORING STUDENTS' ACHIEVEMENTS IN MATHEMATICS AS A METHOD OF TEACHERS' PROFESSIONAL DEVELOPMENT***

The article concerns the educational diagnosis and its connection with teachers' professional development. Based on literature review, as well as the conclusions from the research, the characteristics of the diagnosis conducive to the development of teachers were defined. They became the reference point for the evaluation of the project titled: *What can we already do? Monitoring students' skills a year before the primary school final exam*. The analysed concept of the diagnosis assumes two goals: to reliably measure students' mathematical skills and to support mathematics teachers. In addition, the involvement of students in the research process is an opportunity to develop the diagnostic competences of prospective educators. The assessment was conducted based on research reports, teacher surveys, as well as observations and self-reflections of experts-researchers carrying out the diagnosis. The main problem in the effective execution of the diagnosis understood in this way is the lack of teachers' involvement in the diagnosis. This may stem from a widespread mistrust and the fear of control that is common among teachers. In the case of a formally imposed diagnosis, it takes time and friendly support

* Wydział Pedagogiczny, Uniwersytet Warszawski, ul. Mokotowska 16/20, 00-561 Warszawa

** Wydział Pedagogiczny, Uniwersytet Warszawski, ul. Mokotowska 16/20, 00-561 Warszawa

*** Finansowanie publikacji: Uniwersytet Warszawski

from experts-researchers for teachers to overcome their reluctance to research. The key task for the external researchers is convincing teachers that the diagnosis aims to be an impulse for reflection and self-development, and not a verification of the teachers' competences. Involving teachers and students in the execution of specific stages of the diagnosis is a good practice and it needs to be ensured that their participation is even greater. Execution of the diagnosis understood as support for the teacher, requires proper planning of the entire research process. The structure of tests and the nature of diagnostic tasks are of great importance, as they should enable the analysis of student errors.

Keywords: educational diagnosis, reflective researcher, professional development of teachers, diagnostic tasks, analysis of student errors

Wstęp

Projekt „Co już umiemy? Monitorowanie umiejętności uczniów na rok przed egzaminem ósmoklasisty” zakłada dwa cele: przekazanie informacji na temat poziomu umiejętności siódmoklasistów oraz zachęcenie nauczycieli do autorefleksji, bazującej na analizie błędów popełnianych przez uczniów. Badanie prowadzone jest w ramach współpracy Uniwersytetu Warszawskiego z miastem Ostrołęka od 2019 r.

Podobne działania było realizowane w latach 1996–2019 w Kwidzynie przez pracowników Wydziału Pedagogicznego Uniwersytetu Warszawskiego (w projekcie kwidzyńskim badano początkowo umiejętności uczniów klas I-III). Pierwsze doświadczenia zostały opisane w książkach: *Monitorowanie osiągnięć szkolnych jako metoda doskonalenia edukacji. Zarys metody oraz przykłady zastosowań w edukacji początkowej* (Dolata i in., 1997) oraz *Monitorowanie osiągnięć szkolnych jako metoda wspierania lokalnego środowiska edukacyjnego* (Dolata i in., 2001). Autorzy wymienionych publikacji podkreślali, że zadaniem monitoringu jest **inspirowanie refleksji metodycznej** (Dolata i in., 1997, s. 11). Projekt ostrołęcki bazuje na doświadczeniach monitorowania prowadzonego w Kwidzynie.

Diagnoza jest realizowana na zamówienie organu prowadzącego szkoły, jednak informacja zwrotna jest konstruowana dla poszczególnych szkół i przekazywana do nauczycieli (nie ma raportu porównawczego). Nie stosuje się rankingowania szkół a jedynie pokazuje wyniki placówki w odniesieniu do średnich wyników w mieście. Ponadto wskazuje się na specyficzne dla danej szkoły oraz poszczególnych klas zjawiska, zachęcając nauczycieli do wspólnej refleksji nad ich przyczynami. Raporty są konstruowane tematycznie i każdego roku koncentrują się na innym dziale matematyki. Poza analizą typowych błędów oraz strategii rozwiązań uczniowskich, nauczyciele mogą w nich znaleźć konkretne wskazówki do pracy dydaktycznej. Surowe wyniki dla poszczególnych uczniów oraz wyniki kontekstowe dla szkoły oraz poszczególnych oddziałów klasowych są przekazywane w załączniku i stanowią materiał do wewnątrzszkolnych analiz. Raport zbudowany jest z autonomicznych części, pozwalając

odbiorcom na dowolną strategię zapoznania się z nim (lub jego fragmentami). W naszym rozumieniu, raport jest jedynie punktem wyjścia do głębszej refleksji.

Od samego początku badacze starali się zachęcić nauczycieli do współpracy i przekonać, że celem diagnozy nie jest ocena ich pracy, ale wsparcie.

Korzyści, jakie może nauczycielom przynieść diagnoza wiążą się z ich nastawieniem. Autorefleksja jest możliwa tylko wówczas, gdy podmiot sam będzie do tego zmotywowany. Zatem założenie, że wyniki badania przyczynią się do refleksji może okazać się błędne. Kluczowa jest bowiem inspiracja, bodziec, który będzie sprzyjał autorefleksji. W odniesieniu do diagnozy umiejętności szkolnych uczniów, mogą to być szczegółowe informacje, pozwalające lepiej zrozumieć sposób myślenia ucznia czy przyczyny popełnianych przez niego błędów. Jeśli dane uzyskane podczas diagnozy będą się pokrywać z nauczycielską intuicją mogą stanowić o sile argumentacji, która wzmocni intuicję twardymi dowodami. Bywa jednak i tak, że wyniki badań zaprzeczają potocznej wiedzy nauczyciela. Konfrontacja dwóch stanowisk pozwala na weryfikację dotychczasowego podejścia (niekoniecznie odrzucenie) i bardziej refleksyjne działanie w przyszłości.

Adresatami projektu „Co już umiemy?” są przede wszystkim nauczyciele i badani uczniowie, ale także dyrektorzy, organ prowadzący szkoły oraz studenci zaangażowani w badanie.

Celem artykułu jest przekazanie naszych refleksji z badań w odniesieniu do realizacji kluczowego celu diagnozy, jakim było wsparcie nauczycieli w nauczaniu matematyki w klasach IV–VIII szkoły podstawowej. Autorki, od początku trwania projektu starają się współpracować z nauczycielami i szukają optymalnych strategii przekazu wyników diagnozy i owocnego dialogu z dyrektorami i nauczycielami matematyki. Nasza uwaga koncentruje się na zaangażowaniu nauczycieli w proces diagnozy oraz formie przekazu informacji zwrotnej. Drugim, poruszonym w artykule aspektem, jest udział koderów i badaczy terenowych (studentów i nauczycieli).

Diagnoza w doskonaleniu zawodowym nauczycieli

John Hattie (2015), wśród czynników znacznego wpływu na uczenie się uczniów wymienia zapewnienie nauczycielom ewaluacji kształtującej (wielkość efektu 0,90; s. 372). Mówi o tym także w kontekście nadmiaru ewaluacji sumującej, dostarczanej wraz z powszechnym testowaniem na zakończenie określonego etapu kształcenia. Oznacza to, że nauczyciele potrzebują dobrych diagnoz z jednoczesnymi propozycjami działań, które mogłyby tę sytuację poprawić.

Philipp Cordingley w artykule *The contribution of research to teachers' professional learning and development* (2015) przybliżył dane oraz doświadczenia EPPI-Centre,

wskazujące na efektywność zastosowania badań w praktyce zawodu nauczyciela. Wiedza oparta na dowodach jest dla nauczyciela punktem wyjścia do codziennej praktyki, zarówno w odniesieniu do metod pracy, jak i refleksji, pozwalającej na głębszą, kontekstową analizę działań. Z tego powodu nauczyciele powinni mieć dostęp do wyników rzetelnych badań oraz ich syntetycznej analizy a także być przygotowani do prowadzenia diagnozy w klasach, które uczą. Problemy badawcze oraz język raportów i ekspertyz zewnętrznych powinny być odpowiedzią na potrzeby nauczycieli (Cordingley 2015, s. 248), by mogli i chcieli z nich czerpać.

Istotne jest rozwijanie u nauczycieli umiejętności korzystania z wyników badań (takie założenie jest podstawą funkcjonowania EPPI-centre). Pozwoli to, nie tylko lepiej zrozumieć i krytycznie ocenić dostępne dane i analizy, ale także wzmocnić własny warsztat badawczy. Procedury badawcze, opisane w raportach i artykułach naukowych, mogą być dla nauczycieli inspiracją dla własnej praktyki diagnostycznej.

Powyższe założenia należy wziąć pod uwagę już na etapie planowania diagnozy, dbając o to, by zbierane dane mogły służyć profesjonalnemu uczeniu się nauczycieli (i uczniów), a nie jedynie kształtowaniu ocen (Cordingley, 2015, s. 244). W odniesieniu do diagnozy umiejętności matematycznych, kluczowe znaczenie ma badanie uczniowskiej strategii rozwiązywania zadań, a jeśli to możliwe – poszukiwanie przyczyn ich błędnego myślenia i działania.

Grażyna Szyling rozważa warunki, w których diagnoza inspiruje nauczyciela do poszerzenia horyzontów refleksji nad jego działaniem (Szyling, 2013, s. 59). Odwołując się do koncepcji Jeromy'ego Brunera zwraca uwagę na „nieufność nauczycieli wobec zewnętrznego horyzontu poznawczego, wyłaniającego się z wyników badań instytucjonalnych” (Szyling, s. 62). Znajdują się oni w sytuacji konfrontacji, która jedynie sporadycznie przynosi efekt w postaci autorefleksji i zwiększenia świadomości własnej praktyki. Z kolei autodiagnoza rzadko prowadzi do konfrontacji, ponieważ horyzont poznawczy nauczyciela-badacza w dużej mierze określa charakter uzyskanych wyników (Szyling, s. 61). Przyjąwszy wcześniejsze założenie, że diagnoza stanowi wartość dla rozwoju nauczyciela, warto zastanowić się, jak przezwyciężyć powyższe ograniczenia.

Często krytykowanymi skutkami wprowadzenia do systemu edukacyjnego testów wysokiej stawki jest nauczanie pod test czy zawężenie programu nauczania (Jones, 2007; McMillan, 2005), co między innymi skutkuje ograniczeniem autonomii nauczycieli i uczniów.

Na podobny efekt zwróciła uwagę Małgorzata Żytko, w odniesieniu do badania OBUT (Ogólnopolskie Badania Umiejętności Trzecioklasistów), które u niektórych nauczycieli mogło wzbudzić potrzebę przygotowania dzieci do testu. Było to sprzeczne z intencjami „autorów tego badania, którzy chcieli stopniowo wyposażać nauczycieli w instrumenty badawcze pozwalające im samodzielnie opisywać efekty własnej pracy i modyfikować praktykę edukacyjną” (Żytko, 2013, s. 115).

Potrzebny jest zatem konsensus, polegający na wzmocnieniu procesu samodoskonalenia nauczycieli, korzystających z informacji zwrotnych (formułowanych m.in. na podstawie egzaminów zewnętrznych) i jednocześnie zachowujących swoją autonomię. Badania w działaniu, prowadzone przez Mary Koutselini (2008), pokazały, że oddanie nauczycielom przestrzeni, w której mogą autonomicznie działać jako badacze sprzyja ich zaangażowaniu i motywacji do refleksji i zmiany. Kluczowa jest współpraca nauczycieli z badaczami akademickimi, oparta na dialektycznej relacji i wspólnym konstruowaniu znaczeń (Koutselini, 2008, s. 46). Stanowi to klimat zaufania i współdziałania, daleki od poczucia ograniczenia autorytarną wiedzą konstruowaną przez ekspertów i wcielaną przez nauczycieli-przekazników (Koutselini, 2008, s. 47). Autonomia jest podstawą samorozwoju – zwiększa motywację wewnętrzną, chęć podejmowania wyzwań oraz ciekawość (Franken, 2005).

Przeszkodą w budowaniu takiego klimatu jest brak możliwości podejmowania decyzji o przystąpieniu do projektu badawczego przez nauczycieli. Na ten problem zwróciła uwagę Żytko, podkreślając, że ponad „60% nauczycieli nie miało wpływu na udział w badaniu OBUT” (Żytko, 2013, s. 110).

Autorka na podstawie analizy dyskusji, prowadzonej na forum internetowym OBUT, doszła do wniosku, że nauczyciele koncentrują się na realizacji podstawy programowej, a nie na wspieraniu rozwoju dzieci (Żytko, 2013, s. 114). Dydaktykę opartą na podążaniu za potrzebami dzieci, należy wspierać diagnozą, odzwierciedlającą poziom realizacji celów nauczania i uczenia się, a nie zakres opanowanych treści kształcenia (Rey, 2010, s. 150). Kolejnym warunkiem diagnozy jest zachowanie większej ostrożności metodologicznej podczas debat publicznych, w których prezentowane są wyniki diagnoz (Rey, 2010; Wiliam, 2008). Jan van den Akker podkreśla, że diagnozy powinny pomóc w rozwoju programów nauczania zarówno na poziomie lokalnym, jak i centralnym (Akker, 2010).

Jednym ze sposobów dostarczenia informacji diagnostycznych dla nauczycieli matematyki jest trening „rozpakowania¹ zadania”, czyli rozkładania go na czynniki pierwsze wraz z określeniem celów częściowych (Turner, 2019). Dzięki temu możliwe jest określenie niezbędnych kroków, które musi podjąć uczeń, a także pojęć, które musi znać, by rozwiązać dane zadanie. Rozpakowanie pozwala wydobyc matematykę, ukrytą w scenerii zadania (szczególnie w przypadku zadań z treścią) i w rezultacie skoncentrować się na umiejętnościach i wiedzy ucznia. Tak więc troska o to, **co musi zrobić uczeń, by rozwiązać zadanie powinna zostać zastąpiona analizą, co powinien on umieć i wiedzieć.**

¹ W oryginale *decompressing* – autorki proponują termin „rozpakowanie zadania” analogicznie do skojarzeń: dekompresja danych, rozpakowanie pliku.

Diagnoza pomaga zidentyfikować niezrozumiałe (lub nieprawidłowo przyswojone) pojęcia oraz błędne przekonania (Morris i in., 2009). Stwarza to podstawy do osądu deliberatywnego, który może, ale nie musi pokrywać się z intuicyjną oceną nauczyciela. Istnieje ryzyko, że ocena określona na podstawie tak rozbudowanej analizy doprowadzi do przecenienia nieistotnych aspektów (Plessner i Czenna, 2008). Dlatego ważne jest łączenie obu tych trybów – rzetelna diagnoza pozwala na uzyskanie wielu danych, których wartość można określić m.in. na podstawie intuicji. Intuicja nauczyciela jest wynikiem jego doświadczeń i wiedzy, a więc także praktyki diagnostycznej i myślenia deliberatywnego. Wynika z tego, że zasoby merytoryczne, którymi dysponuje nauczyciel, mają wpływ na to, jak postrzega on błędy uczniowskie. Doskonalenie kompetencji diagnostycznych zapobiega projektowaniu własnej wiedzy na wiedzę uczniów (Nickerson, 1999). W tym kontekście, rozwijające może się okazać korzystanie z diagnozy zewnętrznej lub współpraca przy tworzeniu diagnozy z ekspertami.

Skuteczne uczenie się wymaga zaangażowania, a jeśli to możliwe – partycypacji. Dlatego poza dbałością o rzetelny warsztat badawczy, duże znaczenie ma relacja badaczy-ekspertów z nauczycielami i chęć wzajemnego uczenia się. Impulsem do samodoskonalenia będzie świadomość roli badań w budowaniu wewnętrznej wiedzy nauczyciela (Cordingley, 2015, s. 248) oraz zorientowanie na dociekanie i uczenie się. Refleksyjny nauczyciel odnosi wyniki badań do sytuacji i kontekstu własnej klasy (Attard, 2017). Stara się także wspólnie z innymi nauczycielami ze szkoły analizować zgromadzone dane (Cordingley, 2015, s. 244) i na ich podstawie projektować dalsze działania edukacyjne. Wyniki badań Judith Warren Little wskazują na istotną zależność między efektywnością nauczania a kolegalnością pracy nauczycieli (Little, 1982, s. 325–340).

Odpowiedzi na niektóre pytania, wyłaniające się z danych zgromadzonych w toku badań, mogą formułować jedynie nauczyciele, znający kontekst i specyfikę funkcjonowania określonej szkoły. Profesjonalni badacze (np. uniwersyteccy) mogą pomóc w zaplanowaniu zbierania danych i opracowaniu ram analizy (Cordingley 2015, s. 248).

Analiza błędów uczniowskich w nauczaniu matematyki

Błędy występują w większości procesów uczenia się i mogą zarówno poprawiać, jak utrudniać zrozumienie danego zagadnienia/problemu. Duże znaczenie ma wsparcie nauczyciela, dlatego ważne jest, by był on świadomy wagi błędów, starał się poznać ich przyczyny i wspólnie z uczniem wypracował strategie radzenia sobie z błędami (Heinrichs, Kaisers, 2018, s. 79). Błąd może być konsekwencją

tworzenia uogólnień, które nie są w pełni poprawne. Błędne przekonanie ucznia można wówczas potraktować jako fazę przejściową w procesie pełnego zrozumienia problemu (Swan, 2001).

Według Johna S. Browna i Richarda R. Burtona umiejętność syntezy modelu błędnego przekonania ucznia na podstawie skąpych danych, pochodzących z jego błędów jest jednym z największych talentów nauczyciela (Brown, Burton, 1978, s. 155).

Analiza błędów uczniowskich niejednokrotnie prowadzi do powstania większej liczby pytań niż rozstrzygnięć. Badacze mający do dyspozycji jedynie prace uczniowskie, często muszą się ograniczyć do wskazania hipotetycznych źródeł błędów. W znacznie lepszej sytuacji są nauczyciele, którzy dzięki stałemu kontaktowi z uczniami mogą lepiej zrozumieć konteksty i powody ich działań. Jednak nawet oni nie zawsze są w stanie wskazać źródło pomyłek, ze względu na złożony i wieloaspektowy charakter tych błędów (Ciosek, 1992).

George Booker wyróżnia błędy systematyczne, przypadkowe i wynikające z nieuwagi (1989, s. 99). Jego zdaniem uczniowie, rozwiązując zadania matematyczne, najczęściej popełniają błędy systematyczne, „ujawniające jednolity, zwarty wzór, który wskazuje, że pewne szczególne sposoby myślenia są zakorzenione u ucznia” (Booker, 1989, s. 100). To powoduje, że uczniom trudno jest zmienić swój sposób myślenia, a samo wskazanie błędu przez nauczyciela może być niewystarczające. Według Bookera błędy systematyczne mają głównie charakter nabyty i są efektem wadliwego sposobu nauczania (Booker, 1989, s. 100–102). Analiza błędów uczniowskich jest zatem dla nauczyciela nie tylko informacją o poziomie wiedzy i umiejętności danego ucznia, ale także (a może przede wszystkim?) o skuteczności procedur nauczania, z którymi się spotkał.

Niektórzy badacze próbują uchwycić błędy uczniowskie w obrębie określonej umiejętności lub zagadnienia matematycznego (por. Krygowska, 1989). Takie zawężenie ułatwia tropienie uczniowskich ścieżek myślenia i określenie pułapek, w które najczęściej wpadają. Wyjątkowo cenne dla tego typu analiz są dane zgromadzone na podstawie uczniowskich rozwiązań zadań otwartych. Z kolei zadania zamknięte pozwalają określić skalę trudności, związaną z określonym błędem czy pułapką. Okazują się one całkiem dobrym miernikiem uczniowskich trudności (Jakubowska-Mirek, Stożek, 2022). Analizę błędów uczniowskich ilustrowanych konkretnymi przykładami z testów można znaleźć m.in. w pracach Mirosława Dąbrowskiego (m.in. 2013, 2014), raportach Centralnej Komisji Egzaminacyjnej czy Instytutu Badań Edukacyjnych.

Określenie przyczyny błędu jest pomocne w projektowaniu procesu dydaktycznego (Booker, 1989, s. 106) oraz w efektywnej komunikacji z uczniem. Poznanie perspektywy ucznia pomaga w sformułowaniu adekwatnej informacji zwrotnej, przycy-

niającej się do korekty jego sposobu myślenia. Wspólne omawianie błędów powinno skłonić ucznia do zrozumienia na czym polega jego błędne myślenie, a nie tylko do korekty wyniku (Mnich, 1978). Doprowadzenie dzieci do umiejętności postrzegania własnych błędów wymaga ciągłego kontrolowania ich postępów tak, aby móc wywołać konflikt między metodą lub myśleniem dziecka a zamierzonym procesem zawsze wtedy, gdy pojawia się błąd lub fałszywa koncepcja (Booker, 1989, s. 104).

Błędy systematyczne, o których pisze Booker, nie są odzwierciedleniem trudności matematycznych pojedynczego ucznia, a pokazują niedoskonałość samego procesu nauczania. Świadomość powszechności tych błędów, daje podstawy do podejmowania odpowiednio wcześniej działań profilaktycznych (Krygowska, 1989). Podczas nauki matematyki uczeń powinien zbudować spójną strukturę pojęć, poznać specyficzne dla matematyki narzędzia i nauczyć się je stosować. Zbudowanie takiego spójnego gmachu wiedzy wymaga systematycznej pracy, a luki i niedoskonałości na jakimś etapie tej budowy nie pozwolą na osiągnięcie sukcesu na dalszych etapach. Uczeń wykorzystuje swoje własne doświadczenia do budowania „swojej” matematyki, często opartej na nieporozumieniach czy fałszywych koncepcjach. Dlatego tak ważne jest, by te błędne koncepcje rozpoznać i przekonać ucznia, na czym polega jego błąd. A temu może służyć analiza błędów i uczniowskich strategii rozwiązywania zadań.

Diagnoza umiejętności uczniów ostrołęckich szkół podstawowych – próba oceny

Zamieszczony powyżej przegląd publikacji stanowi podstawę do określenia cech diagnozy, sprzyjającej rozwojowi nauczycieli na bazie ich osobistej refleksji:

1. Diagnoza powinna odzwierciedlać poziom realizacji celów nauczania i uczenia się oraz lub sprzyjać lepszemu poznaniu ucznia (np. przez opisanie strategii rozwiązywania zadań i wypełnianych przez niego błędów).
2. Procedura gromadzenia danych musi być poprawna pod względem metodologicznym, a analizy oparte o rzetelne dane.
3. Badacze zewnętrzni powinni ściśle współpracować z nauczycielami. Nauczyciele oraz studenci powinni być zaangażowani w proces badania i traktowani jak partnerzy. W idealnej sytuacji propozycja diagnozy powinna wyjść od samych nauczycieli lub przynajmniej powinni ją oni w pełni akceptować.
4. Wyniki badań powinny być prezentowane bezpośrednio nauczycielom w zrozumiałym i atrakcyjnym sposób, unikając porównań między uczestnikami pomiaru.
5. Owocem diagnozy powinny być nauczycielskie, autonomiczne interpretacje i wytyczne. W szczególności w odniesieniu do nauczanej klasy. Diagnoza powinna być okazją do kolegialnych rozstrzygnięć nauczycieli uczących w danej szkole (wspólne analizy i interpretacje).

6. Diagnoza powinna być inspiracją do własnej praktyki diagnostycznej nauczycieli oraz wspierać kształtowanie kompetencji diagnostycznych studentów.

W ramach projektu „Co już umiemy? Monitorowanie umiejętności uczniów na rok przed egzaminem ósmoklasisty” przeprowadzono cztery diagnozy, obecnie planowany jest piąty cykl. Od samego początku badacze podejmują refleksję nad usprawnieniem zarówno samego procesu testowania uczniów, jak i relacji z nauczycielami i studentami, których zaangażowanie w istotny sposób wpływa na przebieg diagnozy i wdrożenie jej efektów. Konsekwencją tego namysłu są nieustannie wprowadzane zmiany i odważne plany na przyszłość. Badacze starają się przyjąć postawę otwartą i wsłuchiwać się w potrzeby nauczycieli, jednocześnie zachęcając ich do przekazywania własnych wniosków i opinii na temat monitorowania.

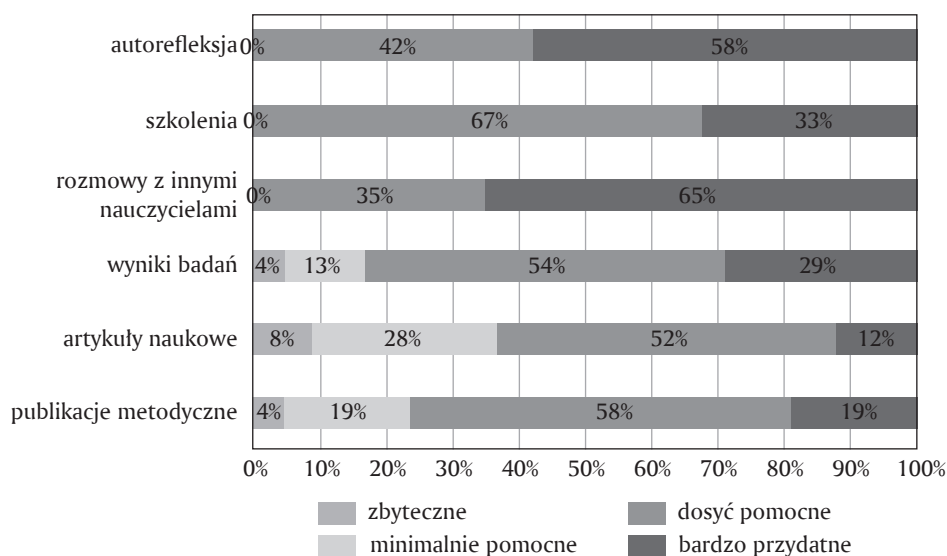
Do poniższej oceny wykorzystano informacje zawarte w raportach z lat 2021–2022, dane z badań w edycji 2021 (w badaniu uczestniczyło 601 uczniów z 30 oddziałów klasowych) i edycji 2022 (badaniem objęto 587 uczniów z 30 oddziałów klasowych) oraz wyniki ankiet przeprowadzonych wśród nauczycieli matematyki we wrześniu 2022 (23 osoby, co stanowi 96% nauczycieli matematyki ostrołęckich szkół podstawowych). Kwestionariusz ankiety dla nauczycieli składał się z 14 pytań i został wypełniony w obecności badaczy podczas warsztatów w szkołach. Pytania kwestionariusza dotyczy m.in. opinii nauczycieli na temat wspierającej roli diagnozy i analizy błędów uczniowskich.

Cel

Diagnozy prowadzone w ostrołęckich szkołach, dotyczą uczniów, którzy w chwili prezentowania wyników jeszcze są w szkole i na których nauczyciel może oddziaływać w procesie nauczania-uczenia się. Dlatego informacja zwrotna, zawarta w raportach, wydaje się dla nauczycieli diagnozowanych uczniów ważna. Konieczność przygotowania uczniów do egzaminu ósmoklasisty zwiększa motywację nauczycieli do poznania wyników i rekomendacji z badań. Trudniej jest zaangażować pozostałych nauczycieli matematyki, dla których temat przygotowania uczniów do egzaminu nie jest problemem „tu i teraz”. Taka sytuacja stanowi wyzwanie dla badaczy, ponieważ zaangażowanie wszystkich nauczycieli matematyki jest kluczowe dla ich samorozwoju i wspólnej refleksji nad koncepcją nauczania tego przedmiotu w szkole. Nie da się wpłynąć na zwiększenie efektywności nauczania i rozumienia matematyki w ciągu kilku miesięcy. Od początku zakładano, że wnioski z badań, mimo, że formułowane w odniesieniu do wyników uczniów najstarszych klas, mogą mieć kluczowe znaczenie i przynieść największe owoce, jeśli będą miały przełożenie na proces nauczania co najmniej od klasy czwartej.

Dlatego rekomendacje, wskazówki dydaktyczne a także cel warsztatów dotyczą z jednej strony działań „interwencyjnych”, realizowanych w klasie ósmej, z drugiej zaś strategii pracy na lekcjach matematyki, niezależnie od wieku uczniów. Po czterech latach prowadzenia diagnozy można powiedzieć, że poczucie jej sensu i wartości wśród nauczycieli jest zróżnicowane. Przeprowadzona w 2022 r. ankieta wśród nauczycieli matematyki ostrołęckich szkół podstawowych pozwoliła poznać opinie nauczycieli na temat diagnozy, a także innych badań. 85% nauczycieli deklaroowało, że przeczytali raport, a jego przydatność ocenili na 5 w skali 6 stopniowej.

Nauczyciele postrzegają wyniki badań jako umiarkowanie przydatne dla ich pracy. Najbardziej cenią autorefleksję i rozmowy z innymi nauczycielami (zob. wykres 1).



Wykres 1. Wyniki ankiety skierowanej do nauczycieli matematyki. „Co i w jakim stopniu pomaga Panu/i w skutecznym nauczaniu matematyki?”

Koncepcja diagnozy zakłada możliwość uzyskania informacji o poziomie wykonania zadań (liczba uzyskanych punktów) przez ucznia. Struktura testu umożliwi analizę kluczowych umiejętności matematycznych, takich jak wiedza, stosowanie i rozumowanie (według pojęć zdefiniowanych w ramie teoretycznej dla międzynarodowego badania TIMSS (Mullis i in., 2017). Analiza jakościowa (z wykorzystaniem kodów) pozwala scharakteryzować uczniowskie strategie rozwiązywania zadań oraz popełnione przez nich błędy.

Rzetelna procedura

Przy przygotowaniu narzędzia diagnostycznego wraz z obudową (test, książeczka kodowa) dokładane są starania, by było ono rzetelne i trafne. Badanie główne poprzedzone jest pilotażem, po którym, w zależności od funkcjonowania zadań w teście, poprawiana lub wymieniana jest część zadań. Podobnie poprawiana i uzupełniana jest książeczka kodowa z uwzględnieniem nieopisanych wcześniej uczniowskich strategii i błędów. Przed przystąpieniem do sprawdzania prac uczniowskich i ich kodowania koderzy przechodzą szkolenie, którego celem jest uzyskanie jednolitego rozumienia zapisów w książeczce kodowej. W trakcie szkolenia uczestnicy kodują wybrane zadania z pilotażu. Następnie, na podstawie sprawdzonych 30 prac uczniowskich z badania głównego, zgłaszają swoje wątpliwości, które rozstrzygane są wspólnie z badaczami-ekspertami, a rozstrzygnięcia nanoszone są do książeczki kodowej. Przez cały czas trwania kodowania prowadzone są konsultacje, a książeczka kodowa jest uzupełniana w miarę potrzeb.

Badana jest trafność i rzetelność testu. Za miarę trafności przeprowadzonego testu przyjęto związek jego wyników z ocenami z matematyki na I semestr klasy VII. Dla każdego oddziału obliczano współczynnik korelacji rangowej Spearmana między oceną nauczycielską a wynikiem z testu. Mediana tych korelacji była wysoka (w badaniu 2022 r. wynosiła 0,77), co wskazuje na silny związek wyników testu z ocenami nauczycielskimi, a tym samym potwierdza trafność narzędzia diagnozy osiągnięć szkolnych. Rzetelność testu z matematyki była mierzona współczynnikiem alfa-Cronbacha i w edycji badania 2022 r. wynosiła 0,83. Ta wartość wskazuje na umiarkowaną rzetelność testu. Jak na test niskiej stawki, któremu towarzyszy niska motywacja uczniów, jest to jednak wynik zadawalający.

Co roku dużym problemem jest brak motywacji testowej uczniów. Objawia się to wysoką frakcją opuszczeń w zadaniach: najczęściej uczniowie opuszczają zadania otwarte z geometrii (w 2021 r. nie podjęło próby rozwiązania jednego z zadań aż 44% badanych uczniów; w 2022 r. w przypadku jednego zadania frakcja opuszczeń sięgnęła 35% badanych). Dla podniesienia rangi przeprowadzanej diagnozy, we wrześniu 2022 r. dyrektorzy i reprezentanci nauczycieli, podczas spotkania roboczego z grupą badaczy zdecydowali, że w 2023 r. diagnoza będzie miała charakter egzaminu próbnego. Maksymalne zaangażowanie uczniów jest kluczowe dla rzetelności diagnozy, dlatego koncepcja zaproponowana przez szkoły jest pożądanym rozwiązaniem.

Współpraca

We wszystkich cyklach badań brali udział studenci, angażowani jako badacze terenowi oraz koderzy. Otrzymali oni szczegółową instrukcję badania/kodowania

a także mieli możliwość aktywnego włączenia się w tworzenie procedur (zgłaszanie propozycji rozwiązań praktycznych podczas badania terenowego i propozycji nowych kodów (koderzy).

Badacze terenowi uczestniczyli w zebraniach, podczas których zapoznali się z procedurą badań a także mieli możliwość skonsultować swoje wątpliwości i obserwacje. Badacze-eksperti starali się stworzyć pozytywny klimat, sprzyjający szczerzej relacji, co jest pomocne podczas ewentualnych trudnych sytuacji w terenie. Koderzy stanowili nieliczną grupę dzięki czemu mieli możliwość wejścia w bliższą relację z badaczami-ekspertami, licząc na indywidualne wsparcie. Poza uczestnictwem w szkoleniu, koderzy mieli możliwość stałej konsultacji, co poza wspomnianym już wcześniej aspektem rzetelności sprzyja także doskonaleniu warsztatu pracy. Jedna z koderek (nauczycielka matematyki podwarszawskiej szkoły podstawowej) tak podsumowała to doświadczenie: „Kodowanie było dla mnie okazją poznania różnych sposobów rozwiązywania zadań, zrozumienia poleceń przez ucznia oraz zastosowania wiedzy przez uczniów”.

Współpraca z nauczycielami ostrołęckimi ograniczała się do przekazania raportu (za pośrednictwem szkoły) oraz warsztatów (z których dwa z powodu pandemii prowadzone były on-line). W edycji 2023 planowane są działania zwiększające zaangażowanie nauczycieli i ich współpracę z badaczami-ekspertami. Będą oni mieli możliwość włączenia się w kodowanie odpowiedzi uczniowskich oraz omówienia wyników uczniów w krótkim czasie po zakończeniu testowania (otrzymują skany testów wypełnionych przez uczniów). Nauczyciele mieli możliwość wyrażenia swojej opinii na temat diagnozy (dwukrotnie w trakcie rozmowy lub czatu i raz za pośrednictwem anonimowej ankiety). Zgodnie z odpowiedziami w kwestionariuszu ankiety nauczyciele uważają, że raport „dostarcza ciekawych sposobów rozwiązywania zadań, jest bogaty w komentarz, zawiera ciekawe cytaty”. Wskazują oni jako wartościową dla ich pracy strategię „dobierania odpowiedniej metody do zadania”. Jedna z respondentek napisała, że raport z badania zainspirował ją do tego, żeby „znaleźć sposób, by zachęcić uczniów do podejmowania próby rozwiązywania zadań, czytania treści ze zrozumieniem”.

Prezentacja wyników

Dyrektorzy, a za ich pośrednictwem nauczyciele, otrzymują raporty zawierające prezentacje i omówienie wyników szkoły, szczegółową analizę wybranego problemu oraz dane dla szkoły i poszczególnych klas (frakcja opuszczeń zadań, poziomy wykonania zadań w podziale na klasy, płeć i rocznik urodzenia ucznia, atrakcyjność dystraktorów w zadaniach zamkniętych, korelacja wyników testu z ocenami szkolnymi). W aneksie znajdują się indywidualne wyniki każdego ucznia.

Adresatem raportu jest nauczyciel. Badacze prezentują wszystkie wyniki, ale omawiają jedynie wybrane problemy (zgodne z określonym wcześniej tematem). Taka strategia pozwala na ograniczenie objętości raportu i pozostawienie przestrzeni do samodzielnej analizy przez nauczycieli. Dużo miejsca w raportach zajmują skany uczniowskich rozwiązań oraz propozycje metodyczne, służące wyeliminowaniu zdiagnozowanych braków.

Analizy i interpretacje nauczycieli

W raportach znajdują się pytania skierowane do nauczycieli, zachęcające ich do samodzielnych analiz i interpretacji. Są to pytania, na które badacze nie znajdują jednoznacznych odpowiedzi, ponieważ są one uzależnione od specyficznych kontekstów klasowych lub szkolnych. Mają one zainspirować nauczycieli do poszukiwania przyczyn zarówno sukcesów, jak i trudności uczniów. Określenie jednoznacznych przyczyn nie zawsze jest możliwe, ale już sama refleksja i uchwycenie „tropów” może okazać się cenną informacją dla nauczyciela. Autorzy raportu wprost zachęcają nauczycieli do podjęcia analizy zespołowej. Z rozmów z nauczycielami wynika, że w niektórych szkołach takie spotkania mają miejsce. Efektem tych spotkań jest przede wszystkim wzajemna inspiracja i pomysły rozwiązań, związanych z nauczaniem w konkretnych klasach.

Warsztaty, w którym uczestniczyli nauczyciele po zakończeniu diagnozy dotyczyły określonych w raporcie problemów uczniowskich. Miały charakter metodyczny i służyły przekazaniu nauczycielom pomysłów pracy z uczniami. Spotkanie było także okazją do zadania badaczom pytań, związanych z treścią raportu. Podczas warsztatów przeprowadzonych we wrześniu 2022 r. nauczyciele zastanawiali się, m.in. nad tym, czym jest dla nich błąd uczniowski. Poniższe wypowiedzi są ciekawymi przykładami postrzegania roli błędów, które popełniają uczniowie – błąd jest:

[...] wglądem w to, jak uczeń myśli; pretekstem do rozmowy z uczniami i wzajemnego przekonywania się na przykładach i kontrprzykładach, kto ma rację; inspiracją do konstruowania takich zadań, które pozwolą sprawdzić, czy podobne błędy nadal się powtarzają; odkryciem, że jakieś treści matematyczne mogą być tak bardzo niezrozumiane; informacją zwrotną dla nauczyciela o skuteczności zastosowanej przez niego metody nauczania.

Warsztat diagnostyczny

Studenci, biorąc aktywny udział w badaniu, mają możliwość doświadczenia i omówienia z badaczami-ekspertami wybranych etapów procesu badawczego, tj. prowadzenia badań w terenie oraz kodowaniu zadań. Podczas wyjazdu są in-

formowani o przebiegu całej diagnozy i chętnie pytają o jej elementy. Po realizacji zadania otrzymują od badaczy-ekspertów informację zwrotną. W szczególności dotyczy to koderów, którzy na podstawie rekodowania otrzymują informacje o ewentualnych błędach, które popełnili. Podczas kodowania testów uczniowskich, koderzy są w nieustannym kontakcie z badaczami-ekspertami, konsultując z nimi każdą wątpliwość. Jest to doskonała okazja do rozwoju, związanego zarówno z warsztatem pracy badacza, jak i kompetencjami matematycznymi. Badacze terenowi otrzymują szczegółową instrukcję prowadzenia testowania, a koderzy – książeczkę kodową, zawierająca szczegółowe informacje o zasadach stosowania danego kodu.

Analiza błędów uczniowskich – przykłady zadań diagnostycznych

Tabela 1. Etapy przygotowania i analizy wyników zadania na potrzeby diagnozy

| | Zadanie zamknięte | Zadanie otwarte/ rozpakowanie zadania/ | Zadanie otwarte/ rozpoznanie strategii uczniowskich/ |
|-------------------------------------|--|---|---|
| Etap konstrukcji zadania | Dobór dystraktorów w sposób umożliwiający odtworzenie sposobu rozumowania ucznia | Zadanie powinno dać łatwo rozłożyć się na „czynniki pierwsze” – niezbędne pojęcia matematyczne | Zadanie daje się rozwiązać na wiele sposobów. |
| Etap projektowania kodów | – | Kody dla rozwiązań uczniowskich powinny odzwierciedlać wykorzystanie przez ucznia pojęć matematycznych | Kody dla rozwiązań uczniowskich powinny odzwierciedlać różne sposoby rozwiązania zadania. |
| Etap analizy statystycznej wyników | Określenie poziomu wykonania zadania, atrakcyjności wyboru dystraktorów | Określenie poziomu wykonania zadania, częstości wykorzystania wymaganych pojęć matematycznych | Określenie poziomu wykonania zadania, częstości zastosowania określonych sposobów rozwiązania zadania |
| Etap analizy błędów systematycznych | Określenie rodzaju błędu, próba opisanie możliwych przyczyn | Analiza jakościowa prac uczniowskich pod kątem najczęściej popełnianych błędów, próba opisanie możliwych przyczyn | |
| Etap rekomendacji dydaktycznych | Sformułowanie propozycji działań przez badaczy lub/i jako wynik dyskusji z nauczycielami lub/i dyskusji w zespole nauczycielskim | | |

Analizę błędów uczniowskich można przeprowadzić w toku jakościowej analizy uczniowskich rozwiązań, ale można się też oprzeć na analizach ilościowych,

pod warunkiem odpowiedniego przygotowania zadań oraz ukierunkowanego na analizę błędów sposobu kodowania uczniowskich rozwiązań. Poniżej zaprezentowano przykłady zadań diagnostycznych, wykorzystanych w latach 2021–2022 w projekcie „Co już umiemy?”.

Zadanie 1

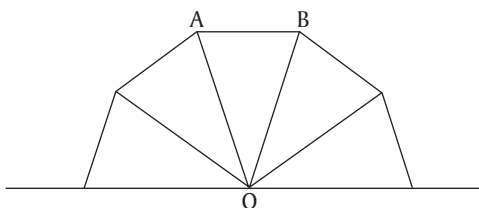
Liczba odwrotna do wartości wyrażenia $2\frac{1}{5} - \frac{1}{5} \cdot 3$ to

- A. $-1\frac{3}{5}$ B. $\frac{5}{8}$ C. $\frac{1}{6}$ D. -6

Zadanie to jest przykładem wykorzystania zadania zamkniętego do diagnozy znajomości pojęcia *liczba odwrotna* i umiejętności poprawnego wykonywania działań z zastosowaniem kolejności wykonywania działań. Rozwiązując to zadanie uczeń musi pokonać dwie trudności: poprawnie obliczyć wartość wyrażenia oraz poprawnie wyznaczyć liczbę odwrotną, nie myląc jej z *liczbą przeciwną*. Dystraktory zostały dobrane tak, żeby odpowiadały poprawnym wyliczeniom oraz liczbie przeciwnej i odwrotnej (to dystraktory A i B) oraz pomyłce w kolejności wykonywania działań i odpowiadającej jej liczbie odwrotnej i liczbie przeciwnej (dystraktory C i D). Poprawne wyliczenia wykonało 50% badanych uczniów. Częściej jednak wybierano odpowiedzi z liczbą przeciwną niż odwrotną (57%). Żadnego z tych wyników nie można uznać za satysfakcjonujący i otwiera on pole do dyskusji o przyczynach tych kłopotów.

Zadanie 2

Ania przygotowała projekt amfiteatru. Wykorzystała do tego pięć identycznych trójkątów równoramiennych, jak pokazano na rysunku poniżej. Oblicz miary wszystkich kątów trójkąta AOB .



Rysunek 1. Rysunek do treści zadania 2

Trudnością dla uczniów był pozorny brak danych w zadaniu. Uczeń powinien rozpoznać kąt półpełny, wykorzystać wiedzę o tym, że miara kąta półpełnego wynosi 180 stopni, a następnie wykorzystać wiedzę o sumie kątów trójkąta i własnościach kątów przy podstawie w trójkącie równoramiennym. To dość trudne roz-

pakowanie zadania. Odpowiednie kodowanie rozwiązań uczniowskich pozwoliło ustalić, że 40% uczniów, którzy podjęli się rozwiązania tego zadania, poprawnie rozpoznało i wykorzystało niezbędne w zadaniu obiekty geometryczne. Dodatkowo 1% uczniów stanowią osoby, które rozpoznały kąt półpełny, ale nie poradziły sobie z dalszą częścią zadania, a dodatkowe 10% uczniów pokazało, że wie, ile wynosi suma kątów w trójkącie, ale nie potrafiło doprowadzić zadania do końca. Zauważmy, że aż 49% uczniów próbując rozwiązać to zadanie błędziło i w swoich rozwiązaniach nie odniosło się do żadnego z w/w obiektów geometrycznych.

Zadanie 3

Suma czterech kolejnych liczb naturalnych jest równa 54. Jakie to liczby? Zapisz obliczenia.

W tym zadaniu oczekiwano zastosowania przez uczniów trzech różnych strategii: metody algebraicznej, metody prób i błędów oraz metody z obliczaniem średniej arytmetycznej. Dzięki zastosowaniu odpowiednich kodów przy sprawdzaniu prac uczniowskich udało się ustalić, że większość uczniów stosowała metodę prób i błędów (56%), choć wydawać by się mogło, że dla ucznia VII klasy szkoły podstawowej bardziej naturalnym byłoby zastosowanie metody algebraicznej (tylko 7% badanych uczniów zastosowało tę metodę). Zastosowanie metody algebraicznej okazało się bardziej skuteczne, bo wybierali ten sposób rozwiązania najsprawniejsi matematycznie uczniowie.

Zadanie 4

Obwód kwadratu jest równy 100 cm. Ile wynosi jego pole? Zapisz obliczenia.

Zaskoczeniem dla badaczy było to, że aż 20% uczniów popełniło błędy wynikające z mylenia pojęć *obwód* i *pole*. Całkowicie poprawnie zadanie rozwiązało zaledwie 33% uczniów.

Mylenie pola z obwodem zdarzało się uczniom także w innych zadaniach, we wszystkich edycjach projektu. Jest to o tyle zaskakujące, że w starszych klasach szkoły podstawowej należałoby oczekiwać, że uczeń powinien swobodnie poruszać się po świecie podstawowych geometrycznych idei, jakimi są obwód, pole i objętość. Przykład tego zadania pokazuje szerszy problem związany z pamięciowym uczeniem matematyki (muszę znać wzór, by rozwiązać zadanie), a nie poprzez rozumienie idei.

W młodszych klasach nauczyciel buduje rozumienie pojęć obwód i pole odwołując się do osobistych doświadczeń ucznia. W starszych klasach można poszerzać rozumienie pola i obwodu rozwiązując zadania na wiele sposobów, nie tylko z wykorzystaniem wzorów na pola figur, ale także poprzez podział na inne figury, uzupełnianie figury do figury o znanym polu itp. Pomocne będą zadania typu:

Janek pamięta tylko wzór na pole trójkąta, jak policzyć pole równoległoboku o podstawie a i wysokości h ? Ola zna wzór na pole trapezu, czy może policzyć pole równoległoboku o podstawie a i wysokości h ?

Podobnie zadania dotyczące obwodu figury i związków obwodu z polem figury, np.

Z prostokąta $ABCD$ o obwodzie L wycięto trójkąt równoboczny AED o obwodzie l w taki sposób, że otrzymana figura ma kształt proporca. Oblicz obwód proporca $ABCDE$.

lub

Boki prostokąta zwiększono dwukrotnie. Jak zmieni się jego obwód, a jak zmieni się jego pole?

W tych zadaniach ważne jest nie tylko samo rozwiązanie, ale rozmowy/ dyskusje z uczniami na temat tego, jak rozumieją ich treść i jak planują je rozwiązać. Tylko w procesie tych dyskusji nauczyciel może upewnić się w tym, że uczniowie rozumieją pojęcia obwodu i pola. Trening tego typu pozwoli uczniom szybko i świadomie rozwiązywać różne zadania geometryczne. Jako przykład przytoczymy tu zadanie z egzaminu próbnego ósmoklasisty z 2020 r.²:

Trapez równoramienny, którego pole jest równe 72 cm^2 , podzielono na trójkąt prostokątny AED i trapez $EBCD$. Odcinek AE ma długość równą 4 cm , a odcinek CD jest od niego 2 razy dłuższy. Oblicz pole o wierzchołkach AED . Zapisz obliczenia.

Zamiast żmudnego przechodzenia przez wzór na pole trapezu i wyznaczenie z niego wysokości trapezu po to, by ją zastosować we wzorze na pole trójkąta, wystarczy podzielić trapez $ABCD$ na 6 przystających do AED trójkątów, skąd od razu dostajemy $PAED = 72/6 = 12 \text{ cm}^2$. Przy okazji rozmowy z uczniami o tym zadaniu, warto podprowadzić ich do ogólniejszej obserwacji, że długość odcinka AE nie ma znaczenia, a podział na 6 przystających do AED trójkątów jest możliwy zawsze wtedy, gdy w trapezie równoramiennym dolna podstawa jest dwa razy dłuższa od górnej podstawy.

Wnioski

Cechy diagnozy, jakie wyłaniają się na podstawie przeglądu literatury okazują się dobrym punktem odniesienia dla oceny projektu „Co już umiemy?”

² <https://cke.gov.pl/egzamin-osmoklasisty/materialy-dodatkowe/>

W projekcie występują wszystkie cechy diagnozy sprzyjającej rozwojowi zawodowemu nauczycieli, choć nie w tym samym nasileniu. Kolejne edycje badania pozwalają stopniowo wzmacniać pożądane cechy. Bariery, utrudniające refleksyjny namysł nad wynikami diagnozy są związane z aspektami organizacyjnymi (diagnoza nie jest wyborem nauczycieli, ale efektem formalnych ustaleń organu prowadzącego) i brakiem identyfikacji z jej założeniami. Przewyciężenie tych barier wymaga czasu i działań, zmierzających do angażowania nauczycieli jako autonomicznych i refleksyjnych odbiorców efektów diagnozy. Ograniczenie roli nauczycieli do wykonawców rekomendacji zawartych w raportach nie stanowi impulsu do zmian. Konsultacja pomysłów i problemów związanych z diagnozą (jak brak motywacji testowej uczniów) pozwala nie tylko bardziej angażować społeczność szkolną, ale również skutkuje pożądanymi rozstrzygnięciami metodologicznymi (zwiększenie wagi testu). Niewątpliwie motywacja testowa uczniów jest związana z motywacją testową nauczycieli, dlatego konieczne jest wsłuchiwanie się w potrzeby i opinie nauczycieli matematyki.

Mimo że projekt realizowany jest od czterech lat, to jest jeszcze zbyt wcześnie, by mówić o jego wpływie na wyniki nauczania matematyki w ostrołęckich szkołach podstawowych. Wartością projektu jest to, że udaje się tworzyć grupę osób uczących się: nauczycieli matematyki, koderów, studentów-badaczy oraz samych badaczy-ekspertów, którzy w interakcji doskonalą swój warsztat pracy.

Łączenie dwóch celów diagnozy jest zadaniem trudnym, ale pożądanym. Rzetelny pomiar uczniowskich umiejętności w odniesieniu do egzaminu ósmoklasisty wymaga nieco innych zadań testowych niż tropienie sposobów myślenia i przyczyn uczniowskich błędów. Osiągnięty w diagnozie kompromis powoduje niedosyt danych w odniesieniu do każdego z celów, ale jednocześnie stanowi o innowacji tego rozwiązania i zgodności z założoną przez badaczy koncepcją.

Doświadczenia dotychczasowych diagnoz oraz refleksje związane z ich doskonaleniem ukierunkowują nas w stronę „dialogiczności w nauczaniu matematyki”, rozumianej jako działanie powiązane z innymi działaniami i kontekstami. Wprowadza to określony porządek relacyjny zarówno między dydaktyką i diagnozą, jak i między nauczycielami i badaczami.

References

- Akker, J. van den (2010). Building bridges: how research may improve curriculum policies and classroom practices. W: S. M. Stoney (red.), *Beyond Lisbon 2010: perspectives from research and development for education policy in Europe* (s.175–195). CIDREE. Pobrane z: http://www.cidree.org/fileadmin/files/pdf/publications/YB_10__Beyond_Lisbon_2010.pdf (otwarty 5.01.2023).
- Attard, K. (2017). Personally driven professional development: reflective self-study as a way for teachers to take control of their own professional development. *Teacher Development*, 21(1), 40–56.

- Booker, G. (1989). Rola błędów w konstrukcji matematycznej wiedzy. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego*, Seria V, Dydaktyka Matematyki 11, 99–108.
- Brown, J. S., Burton, R. R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science*, 2(2), 155–192.
- Ciosek, M. (1992). Błędy popełniane przez uczących się matematyki i ich hipotetyczne przyczyny. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego*, t. 13, (01), 65–161.
- Cordingley, P. (2015). The contribution of research to teachers' professional learning and development. *Education Oxford Review of Education*, 41(2), 234–252.
- Dąbrowski, M. (2013). *(Za) trudne, bo trzeba myśleć? O efektach nauczania matematyki na I etapie kształcenia*. Warszawa: Instytut Badań Edukacyjnych.
- Dąbrowski, M. (2014). Analiza uczniowskich błędów – narzędzie polityki edukacyjnej kraju? *Problemy Wczesnej Edukacji*, 3(26), 77–92.
- Dolata, R., Murawska, B., Putkiewicz, E., Żyto, M. (1997). *Monitorowanie osiągnięć szkolnych jako metoda doskonalenia edukacji. Zarys metody oraz przykłady zastosowań w edukacji początkowej*. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie Żak.
- Dolata, R., Murawska, B., Putkiewicz, E. (2001). *Monitorowanie osiągnięć szkolnych jako metoda wspierania lokalnego środowiska edukacyjnego*. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie Żak.
- Franken, R. E. (2005). *Psychologia motywacji*, tłum. M. Przyłipiak. Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne.
- Hattie, J. (2015). *Widoczne uczenie się dla nauczycieli*, tłum. Z. Janowska. Warszawa: Centrum Edukacji Obywatelskiej.
- Heinrichs, H., Kaiser, G. (2018). Diagnostic Competence for Dealing with Students' Errors: Fostering Diagnostic Competence in Error Situations. W: T. Leuders, K. Philipp, J. Leuders (red.), *Diagnostic Competence of Mathematics Teachers. Mathematics Teacher Education*, 11. Cham: Springer.
- Jakubowska-Mirek, M., Stożek, E. (2022). Pewność wyboru odpowiedzi w zadaniach zamkniętych. W: B. Niemierko i M. K. Szmigel (red.), *Diagnozowanie kształcenia w edukacji stacjonarnej i zdalnej* (s. 327–335). Kraków: grupa TOMAMI.
- Jones, B. D. (2007). The unintended outcomes of high-stakes testing. *Journal of Applied School Psychology*, 23, 65–86.
- Krygowska, A.Z. (1989). Zrozumieć błąd w matematyce. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego*, Seria V, Dydaktyka Matematyki 10, 141–147.
- Little, J.W. (1982). Norms of collegiality and experimentation. Workplace conditions of school success. *American Educational Research Journal*, t. 19(3), 325–340.
- Mnich, W. (1978). O błędach w rozumowaniu uczniów. *Matematyka*, 3, 159–165.
- Nickerson, R. S. (1999). How we know-and sometimes misjudge-what others know: Imputing One's own knowledge to others. *Psychological Bulletin*, 125(6), 737.
- Rey, O. (2010). The use of external assessments and the impact on education systems. W: S. M. Stoney (red.), *Beyond Lisbon 2010: perspectives from research and development for education policy in Europe*. CIDREE, 137–158. Pobrane z: http://www.cidree.org/fileadmin/files/pdf/publications/YB_10__Beyond_Lisbon_2010.pdf (otwarty 5.01.2023).
- Swan, M. (2001). Dealing with misconceptions in mathematics. W: P. Gates (red.), *Issues in mathematics teaching* (s. 147–165). London, UK: Routledge Falmer.
- Szyling, G. (2013). Diagnoza i ewaluacja a teoretyczne horyzonty refleksji nad działaniem. *Teraźniejszość–Człowiek–Edukacja*, 4(64), 56–70.

- Mullis, I. V. S., Martin, M. O. (red.). (2017). *TIMSS 2019 Assessment Frameworks*. Retrieved from Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center website: <http://timssandpirls.bc.edu/timss2019/frameworks/>
- Turner, M. (2019). Compression and Decompression in Mathematics. W: Danesi, M. (eds) *Interdisciplinary Perspectives on Math Cognition*. Mathematics in Mind. Cham: Springer.
- Wiliam, D. (2008). International comparisons and sensitivity to instruction. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, 15, 3, 253–257.
- Żytko, M. (2013). Ogólnopolskie Badanie Umiejętności Trzecioklasistów (OBUT) – pedagogiczny eksperyment z „politycznymi konsekwencjami”, *Teraźniejszość–Człowiek–Edukacja*, 4(64), 101–116.